Pesquisa Operacional I

Programação Linear

Haron Calegari Fanticelli

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
Uned Itaguaí

2 de abril de 2024

Programação

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Recapitulação

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Modelo de Otimização

- Forma-padrão (HILLIER, 2010):

$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{Maximizar:} & f(\mathbf{x}) & & \\
\textbf{Sujeito a:} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\
\textbf{e:} & \mathbf{x} & \geq & 0
\end{array}
$$

Modelo de Otimização

- Forma-padrão (HILLIER, 2010):

$$\begin{array}{rrcl} \textbf{Maximizar:} & f(\mathbf{x}) & & \\ \textbf{Sujeito a:} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \textbf{e:} & \mathbf{x} & \geq & 0 \end{array}$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{rcccccc} \textbf{Maximizar:} & Z & = & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \textbf{Sujeito a:} & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ \textbf{e:} & & \mathbf{x} & \geq & 0 & \end{array}$$

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Modelo de Otimização

- Forma-padrão (HILLIER, 2010):

$$\begin{array}{lccc} \textbf{Maximizar:} & f(\mathbf{x}) & & \\ \textbf{Sujeito a:} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \textbf{e:} & \mathbf{x} & \geq & 0 \end{array}$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{lccccccc} \textbf{Maximizar:} & Z & = & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \textbf{Sujeito a:} & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ \textbf{e:} & & \mathbf{x} & \geq & 0 & \end{array}$$

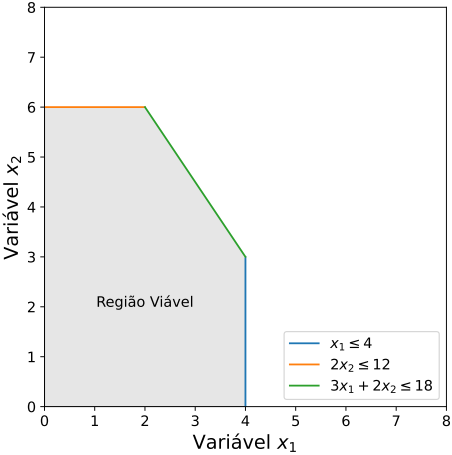


Figura: Gráfico de Região Viável

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Modelo de Otimização

- Forma-padrão (HILLIER, 2010):

$$\begin{array}{rccc} \textbf{Maximizar:} & f(\mathbf{x}) & & \\ \textbf{Sujeito a:} & A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \textbf{e:} & \mathbf{x} & \geq & 0 \end{array}$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{rcccccc} \textbf{Maximizar:} & Z & = & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \textbf{Sujeito a:} & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ \textbf{e:} & & \mathbf{x} & \geq & 0 & \end{array}$$

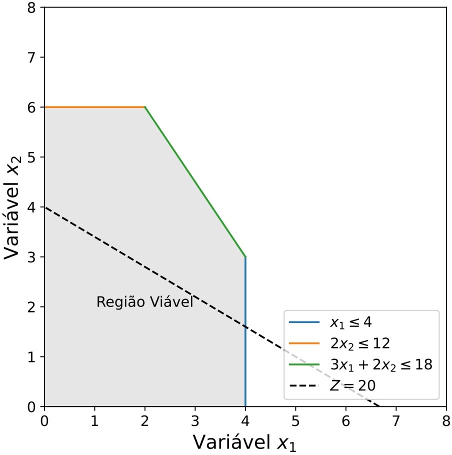


Figura: Gráfico de Região Viável

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

O Método Simplex

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Introdução

- Proposto em 1947 por George B. Dantzig;
- 2000: Reconhecido como um dos 10 algoritmos mais importantes do século 20 (IEEE);

George Bernard Dantzig: The Pioneer of Linear Optimization

Management and Business Review, Vol. 1, No. 1, Winter 2021

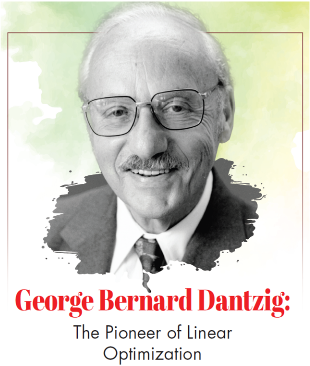
3 Pages • Posted: 2 Sep 2021

John R. Birge
University of Chicago - Booth School of Business

Date Written: 2021

Abstract

George Dantzig introduced the world to the power of optimization, creating trillions of dollars of value and saving countless years of life across the globe. In this laudation, John Birge describes the fascinating life and incredible accomplishments of a scholar whose footprints led the way to almost everything the global economy produces.



CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

- **Config 01:** Colocar o modelo na forma padrão;

$$
\begin{array}{lccccccc}
\textbf{Maximizar:} & Z & = & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\textbf{Sujeito a:} & & & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
\textbf{e:} & & & & \mathbf{x} & \geq & 0 &
\end{array}
$$

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

- **Config 01:** Colocar o modelo na forma padrão (Variáveis de Folga);

Maximizar: $Z = 3x_1 + 5x_2 + 0f_1 + 0f_2 + 0f_3$

Sujeito a:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & +f_1 & & & = & 4 \\
 & 2x_2 & & +f_2 & & = & 12 \\
3x_1 & +2x_2 & & & +f_3 & = & 18
\end{array}
$$

e: $\mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{f} \geq 0$

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

- **Config 01:** Colocar o modelo na forma padrão (Variáveis de Folga);
- **Config 02:** Colocar a função objetivo Z = 0;

Maximizar: $Z - 3x_1 - 5x_2 - 0f_1 - 0f_2 - 0f_3 = 0$

Sujeito a:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & +f_1 & & & = & 4 \\
 & 2x_2 & & +f_2 & & = & 12 \\
3x_1 & +2x_2 & & & +f_3 & = & 18
\end{array}
$$

e: $\mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{f} \geq 0$

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

- **Config 01:** Colocar o modelo na forma padrão (Variáveis de Folga);
- **Config 02:** Colocar a função objetivo Z = 0;
- **Config 03:** Tabular as variáveis;
- **Config 04:** Variáveis Básicas = 0 / Solução Inicial na Origem;

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	$=$
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
f_1	0	1	0	1	0	0	4
f_2	0	0	2	0	1	0	12
f_3	0	3	2	0	0	1	18

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

1ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	$=$
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
f_1	0	1	0	1	0	0	4
f_2	0	0	2	0	1	0	12
f_3	0	3	2	0	0	1	18

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

1ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	$=$
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
f_1	0	1	0	1	0	0	4
f_2	0	0	2	0	1	0	12
f_3	0	3	2	0	0	1	18

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

1ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);
- **Passo 03:** Fazer a troca de variáveis - Operações Elementares;

				$\downarrow$				
	VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	$=$
	Z	1	-3	-5	0	0	0	0
	f_1	0	1	0	1	0	0	4
$\leftarrow$	f_2	0	0	2	0	1	0	12
	f_3	0	3	2	0	0	1	18

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

1ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);
- **Passo 03:** Fazer a troca de variáveis - Operações Elementares;
- **Passo 04:** Critério de Parada - Função objetivo não possuir valores negativos;

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	$=$
Z	1	-3	0	0	2.5	0	30
f_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	0.5	0	6
f_3	0	3	0	0	-1	1	6

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

2ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);
- **Passo 03:** Fazer a troca de variáveis - Operações Elementares;
- **Passo 04:** Critério de Parada - Função objetivo não possuir valores negativos;

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	$=$
Z	1	0	0	0	1.5	1	36
f_1	0	0	0	1	0.33	-0.33	2
x_2	0	0	1	0	0.5	0	6
x_1	0	1	0	0	-0.33	0.33	2

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Forma Tabular do Simplex

2ª Iteração

- **Passo 01:** Coluna Pivô (Objetivo) - Escolher Menor valor (negativo);
- **Passo 02:** Linha Pivô (Restrições) - Escolher Menor Razão (positivo);
- **Passo 03:** Fazer a troca de variáveis - Operações Elementares;
- **Passo 04:** Critério de Parada - Função objetivo não possuir valores negativos;

VB	Z	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	$=$
Z	1	0	0	0	1.5	1	36
f_1	0	0	0	1	0.33	-0.33	2
x_2	0	0	1	0	0.5	0	6
x_1	0	1	0	0	-0.33	0.33	2

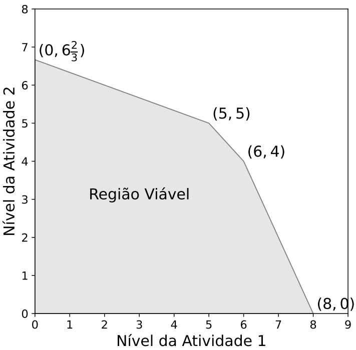
Solução Ótima: $\mathbf{x} = (2, 6)$ e $Z = 36$

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Atividade de Aprendizagem

Atividade de Aprendizagem

- **(1)** Um certo modelo de programação linear envolvendo duas atividades possui a região de soluções viáveis indicada a seguir.



O objetivo é maximizar o lucro total das duas atividades. O lucro unitário para a atividade 1 é de US$ 1.000 e o lucro unitário para a atividade 2 é de US$ 2.000.

- **(a)** Calcule o lucro total para cada solução de pontos extremos. Use esta informação para encontrar uma solução ótima.
- **(b)** Use os conceitos de solução do Método Simplex para identificar a sequência de soluções que seriam examinados pelo método até chegar a solução ótima.

Atividade de Aprendizagem

- **(2)** Pelo método simplex, passo a passo, solucione o problema a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ \text{Sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ \text{e} \quad & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- **(3)** Descreva graficamente o que o método simplex faz passo a passo para solucionar o problema a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ \text{e} \quad & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

CEFET/RJ
Uned Itaguaí

Referências e Próxima Aula

Referências e Próxima Aula

- HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à Pesquisa Operacional.** Porto Alegre: Bookman, 2010.
- TAHA, Hamdy A. **Pesquisa Operacional.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

Próxima Aula

- Empate para a Coluna Pivô (Variável Básica que Entra);
- Empate para a Linha Pivô (Variável Básica que Sai);
- Nenhuma Linha Pivô (Variável Básica que Sai) - Z Ilimitado;
- Soluções Ótimas Múltiplas.

CEFET/RJ
Uned Itaguaí


Multumesc
Ua Tsaug Rau Koj
CHOKRANE
Juspaxar
Nirringrazzjak
Matondo
Terma Kasih
Dank Je
Chokrane
Kiitos
Mamana
Mochchakkeram
Maake
Kiitos
CHOKRANE
Merci
Kiitos
Obrigado
Obrigado
Vinaka
Thank You
Dankon
Obrigado
Grazie
THANK YOU
Asante
Maake
Terma Kasih
Salamat
Nirringrazzjak
Dank Je
OBRIGADO
Kiitos
Mochchakkeram
Merci
Multumesc
Obrigado
Ua Tsaug Rau Koj
Thank You
Welalin
Kiitos Multumesc
Spasibo
Chokrane
Matur Nuwun
Spasibo
Kiitos
Dank Je
Cam on ban
Kiitos
Maake
Nirringrazzjak
Arigato
Raibh Maith Agat
Nirringrazzjak
Salamat
Merci
Raibh Maith Agat
Chokrane
Juspaxar
Grazie
Mochchakkeram
Raibh Maith Agat
Obrigado
Maake
Mochchakkeram
Asante
Obrigado
Mochchakkeram
Obrigado